Exercices et problèmes

17 Soit deux entiers a et b tels que $a \equiv 5 \pmod 4$ et $b \equiv 2 \pmod 4$.

Déterminer le reste modulo 4 de $3a^2 + ab - 9$.

18 Soit un entier a tel que $a \equiv 7 \pmod{11}$.

Déterminer le reste modulo 11 de $a(a+1)(a+2)$.

19 1. Montrer que

$1^2 + 2^2 + \ldots + n^2 = \dfrac{n(n+1)(2n+1)}{6}$.

2. En déduire le reste modulo 7 de $1^2 + 2^2 + \ldots + 100^2$.

20 Déterminer le reste modulo 10 de chacun des entiers 30757, 15163 et 12924.

21 Déterminer les restes modulo 17 de 171^{171}, 186^{186}, 356^{583}.

22 1. Déterminer le reste modulo 10 de -1.

2. Déterminer le chiffre des unités de 9^{2007} et 9^{2008}.

23 Déterminer les restes modulo 16 de chacun des entiers 49^{316}, 15^{2008} et $(-49)^{237}$.

24 Déterminer le reste modulo 13 de 4^3 et de 121^{357}.

25 1. Déterminer le reste modulo 7 de 50^{99}.

2. Déterminer le reste modulo 17 de 50^{99}.

26 Déterminer le reste modulo 7 de $19^{52} \times 23^{41}$.

27 1. Déterminer le reste modulo 13 de 5^4.

2. En déduire les restes modulo 13 de chacun des entiers 5^{4k}, 5^{4k+1}, 5^{4k+2}, 5^{4k+3} avec $k \in \mathbb{N}$.

3. Déterminer les restes modulo 13 de chacun des entiers $5^{202020202041}$ et $5^{555555555555}$.

4. Déterminer l'ensemble des entiers naturels n, tels que $5^{2n} + 5^n \equiv 0 \pmod{13}$.

28 1. Déterminer les restes modulo 5 de -1 et de -2.

2. En déduire que $1^{2099} + 2^{2099} + 3^{2099} + 4^{2099}$ est divisible par 5.

29 1. Vérifier que $999 \equiv 0 \pmod{27}$.

2. a. Montrer que pour tout entier naturel n, $10^{3n} \equiv 1 \pmod{27}$.

b. En déduire le reste modulo 27 de $10^{100} + 100^{10}$.

30 Soit n un entier naturel.

1. Montrer que $2^n \equiv 1 \pmod 5$, si et seulement si, n est multiple de 4.

2. Donner une condition nécessaire et suffisante sur n pour que $2^n \equiv 1 \pmod{11}$.

31 Soit n un entier.

Quels sont les restes possibles modulo 5 de n^2 ?

Quels sont les restes possibles modulo 7 de n^3 ?

32 Résoudre dans $\mathbb{Z}$,

a. $2x \equiv 4 \pmod{10}$.

b. $4x \equiv 8 \pmod{10}$.

33 Résoudre dans $\mathbb{Z}$,

a. $x^2 \equiv 0 \pmod 4$.

b. $x^2 \equiv 2 \pmod 4$.

c. $x^2 \equiv 3 \pmod 4$.